15 Banach space ニ於ケル解析的 operator ニ就テ

清水辰次郎 (阪大)
(1946. XII. 9 受付)

$x, y, \cdots\cdots, a, b, \cdots\cdots$ 等ヲ Banach 空間ノ要素トシ, $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$ 等ヲ複素数トスル (本誌二輯一号参照)

$\|x\| < R$ ニテ定義サレタ operator $f(x)$ ガ次ノ條件ヲ満足スルトキ analytic operator ト云フ

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{f(x+\tau y) - f(x)}{\tau} = \delta f(x; y)$$

左辺ガ存在シ右辺ハ y ニ関シ一次ノ operator トス。但シ $f(x)$ ノ連續性ヲ假定シナイ。

其時 $\|x\| < R' < R$ ニテ $f(x)$ ガ有界 ($\|f(x)\| < M$ ナル M ノ存在スルコト) ナルトキ

$$f(x) = f(0) + f_1(x) + \cdots\cdots + f_n(x) + \cdots\cdots$$

ガ $\|x\| < K \leqq R'$ ニテ一様収斂ナル K ガ定マル (コノ K ニ関シテハ, 本誌二輯一号 [illegible]者ノ論文参照)

$f_1, f_2 \cdots\cdots$ ハ夫々一次, 二次, $\cdots\cdots$, ノ斉次多項式 operator デアル。

依ッテ $\|x\| < K$ ナル x ニ対シ $f_n(x)$ ノ積分表示即チ

$$\delta^n f\left(x, \frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f\left(x+\alpha\frac{y}{\|y\|}\right)}{\alpha^{n+1}}\, d\alpha$$

ヨリ　$\|\delta^n f(x, y)\| \le \dfrac{M_x\|y\|^n}{r^n}$

依ツテ　$\|f(x)-f(0)\| \le M_0 \dfrac{\|x\|}{r}\left(1+\dfrac{\|x\|}{r}+\cdots\right) = \dfrac{\|x\|}{r}\dfrac{M_0}{1-\frac{\|x\|}{r}}$

即チ $f(x)$ ハ $x=0$ ニテ連續トナル。

次ニ $\|x\|<K$ ニテ連續ナルコトヲ示ス。
$\|x\|<K$ 内部ニ一点 x_0 ヲトリ、ソコニテ $f(x)$ ヲ展開スレバ $f(x_0+\tau y) = f(x_0) + \tau f_1(x_0; y) + \cdots + \frac{\tau^n}{\lfloor n} f_n(x_0; y) +$
右辺ハ $\|\tau y\| < r' < K-\|x_0\|$ ニテ確カニ有界ナル故右辺モソコニテ一様収斂スル。
$f_1, f_2, \cdots$ ハ y ニ関シ夫々一次二次……斉次多項式 operator ニテ上ニミタ如ク悉ク x_0 ニテ連續デアルカラ $\|\tau y\|\to 0$ ナルトキ $f(x_0+\tau y)\to f(x_0)$
即チ連續デアル。
依ッテ $\|x\|<K$ ニテ analytic operator ハ有界(上ノ意味ニテ)ナラバ連續スルヲ知ッタ。

普通ノ函數論ノ如ク解析接續ノ考ヘヲ拡張スルナラバ解析 operator ハ有界ナル処ニテ連續ナルヲ知ル。

到ル処不連續ナル analytic operator ノ例ハ下ノ如キモノガアル空間ハ点ヲ Hamel ノ Base ニ依ッテ

$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k$　ト表ハストキ

$$f(x) = \varphi_1(\alpha_1)f(x_1) + \varphi_2(\alpha_2)f(x_2) + \cdots \varphi_k(\alpha_k)f(x_k)$$

此処ニ $f(x_1)\cdots f(x_k)\cdots$ ハ任意ニトリウル値ニテ
$\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \cdots \varphi_n(\alpha)\cdots$ ハ複素変數ノ解析函數トス